

ПРИБЛИЖЕННОЕ РЕШЕНИЕ ОСНОВНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ В КОЛЬЦЕОБРАЗНОЙ ОБЛАСТИ

Аннотация.

Актуальность и цели. Работа посвящена актуальной проблеме, заключающейся в построении и развитии эффективных численных методов решения полигармонического уравнения. Цель работы – получение приближенного решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в двусвязной области, ограниченной изнутри контуром ∂D_1 и извне контуром ∂D_2 (кольцеобразная область).

Материалы и методы. Задача решена с использованием конформного отображения рассматриваемой области на круговое кольцо. Искомая n -гармоническая функция представляется через n аналитических функций комплексного переменного, каждая из которых отыскивается в круговом кольце в виде ряда Лорана. Для вычисления коэффициентов ряда применен численный метод коллокации.

Результаты. Получено приближенное численно-аналитическое решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения в кольцеобразной области. Рассмотрены тестовые примеры, подтверждающие хорошую точность решения.

Выводы. Из рассмотренных тестовых примеров видно, что предложенный способ решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения в кольцеобразной области является достаточно эффективным.

Ключевые слова: оператор Лапласа, полигармоническое уравнение, основная краевая задача, двусвязная кольцеобразная область, конформное отображение, ряд Лорана, метод коллокации, система линейных алгебраических уравнений.

APPROXIMATE SOLUTION OF THE MAIN BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A POLYGARMONIC EQUATION IN THE RING-SHAPED DOMAIN

Abstract.

Background. This work is devoted to the actual problem of construction and development of effective numerical methods to solve a polyharmonic equation. The aim of the paper is to obtain an approximate solution of the basic boundary-value problem for a polyharmonic equation in a doubly-connected domain, bounded from the inside by contour ∂D_1 and from the outside by contour ∂D_2 (ring-shaped domain).

Materials and methods. The problem is solved by using the conformal mapping of the considered domain to a circular ring. The desired n -harmonic function is represented by n analytic functions of a complex variable, each of which is sought in the circular ring in the form of a Laurent series. To calculate the coefficients of the series a numerical collocation method is applied.

Results. An approximate numerical-analytic solution of the main boundary-value problem for a polyharmonic equation in the ring-shaped domain is obtained. The test examples are considered and confirm the good accuracy of the solution.

Conclusions. From the test examples it can be seen that the proposed method for solving the main boundary-value problem for a polyharmonic equation in the ring-shaped domain is quite effective.

Key words: Laplace operator, polyharmonic equation, main boundary value problem, doubly-connected ring-shaped domain, conformal mapping, Laurent series, collocation method, system of linear algebraic equations.

Введение

Классы гармонических и бигармонических функций в разное время изучались такими выдающимися математиками, как Г. В. Колосов, Ф. Д. Гахов, Н. И. Мусхелишвили и другими учеными. Благодаря их основополагающим работам в математической теории упругости классическая теория краевых задач для аналитических функций была достаточно хорошо систематизирована, в изучение были введены полианалитические функции.

Впервые устойчивый интерес к полигармоническим уравнениям проявился в работах И. Н. Векуа [1], где эллиптические уравнения высших порядков изучены с использованием аппарата теории аналитических функций. В дальнейшем изучение краевых задач для полианалитических функций велось в работах В. С. Рогожина [2], М. П. Ганина [3], А. В. Бицадзе [4] и других математиков, где, в частности, рассматривалась корректность задач для полигармонического уравнения. За последние десятилетия был получен ряд значимых результатов в области теории полигармонических уравнений: изучены некоторые свойства полигармонических функций (В. П. Михайлов [5], А. В. Бицадзе [6] и др.); получены условия разрешимости краевых задач для некоторых областей частного вида (Б. Е. Кангузин, Б. Д. Кошанов [7] и др.); доказаны теоремы существования и единственности (Б. Х. Турметов, М. Т. Ильясова [8] и др.); решены некоторые краевые задачи в круге, полосе и некоторых других областях (В. И. Жегалов [9] и др.).

Решение бигармонического уравнения с применением метода конформного отображения рассмотрено в работах [10, 11] при исследовании движения цилиндра в ограниченной жидкости. Применению методов теории функций комплексного переменного и метода коллокации к решению основной краевой задачи для полигармонического уравнения в односвязной области посвящена работа [12].

В настоящей работе решена основная краевая задача для полигармонического уравнения в двусвязной кольцеобразной области с применением тех же методов, что и в [12], однако для односвязной и двусвязной областей имеются существенные различия в решении. Рассматриваемая задача сведена к системе линейных алгебраических уравнений. Решение дает достаточно точные результаты, что подтверждается тестовыми примерами.

1. Постановка задачи

Искомой является функция $u(x, y)$, удовлетворяющая в двусвязной кольцеобразной области D полигармоническому уравнению $\Delta^n u = 0$, непре-

рывная вместе со своими частными производными до $(n-1)$ -го порядка включительно в замкнутой области $\bar{D} = D \cup \partial D_1 \cup \partial D_2$ и удовлетворяющая на гладких границах ∂D_1 и ∂D_2 условиям:

$$u|_{\partial D_j} = g_0^{(j)}(s_j), \quad \left. \frac{\partial^k u}{\partial n^k} \right|_{\partial D_j} = g_k^{(j)}(s_j), \quad s_j \in \partial D_j, \quad (k = \overline{1, n-1}, \quad j = 1, 2), \quad (1)$$

где $\frac{\partial}{\partial n}$ – производная по направлению внешней нормали к границе области, $g_k^{(j)}$ ($k = \overline{0, n-1}$, $j = 1, 2$) – заданные действительные функции.

Здесь $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ – оператор Лапласа.

В работе [1] доказаны существование и единственность решения такой задачи.

2. Представление полигармонической функции в двусвязной области

Если от переменных x , y перейти к комплексным переменным $z = x + iy$, $\bar{z} = x - iy$, то оператор Лапласа примет вид

$$\Delta = 4 \frac{\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}},$$

и полигармоническое уравнение $\Delta^n u = 0$ запишется в виде

$$\frac{\partial^{2n} u}{\partial z^n \partial \bar{z}^n} = 0. \quad (2)$$

Непосредственным интегрированием уравнения (2) в двусвязной области можно получить, что вещественная n -гармоническая функция u представляется через n аналитических функций комплексного переменного:

$$u = \operatorname{Re} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \bar{z}^k \varphi_k(z) + \sum_{l,k=0}^{n-1} B_{kl} z^k \bar{z}^l \ln |z - z_0| \right], \quad (3)$$

где $\varphi_k(z)$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) – произвольные голоморфные функции в двусвязной области D ; z_0 – некоторая фиксированная точка, лежащая в односвязной области, ограниченной внутренним контуром ∂D_1 области D ; B_{kl} – произвольные постоянные, удовлетворяющие условиям:

$$\overline{B_{kl}} = B_{lk} \quad (k, l = 0, 1, \dots, n-1). \quad (4)$$

Из условий (4) следует, что $B_{kk} \in \mathbb{R}$, $k = 0, 1, \dots, n-1$. Без ограничения общности можно считать, что $z_0 = 0$. Тогда формула (3) примет вид

$$u = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[\bar{z}^k \varphi_k(z) + z^k \overline{\varphi_k(z)} + \ln|z| \left(A_k |z|^{2k} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} [B_{kl} z^k \bar{z}^l + B_{lk} \bar{z}^k z^l] \right) \right], \quad (5)$$

где $A_k = 2B_{kk}$.

Этот результат полностью согласуется с результатом, полученным И. Н. Векуа [1] для многосвязной области.

Двусвязную кольцообразную область D плоскости z можно конформно отобразить на круговое кольцо плоскости ζ , внутренний и внешний радиусы которого равны соответственно r_1 и $r_2 = \mu r_1$, где $\mu > 1$ – модуль двусвязной области. Тогда задача сводится к нахождению n голоморфных функций $\varphi_k(\zeta)$, каждую из которых можно представить в круговом кольце в виде ряда Лорана с комплексными коэффициентами:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \zeta^m \quad (k = \overline{0, n-1}), \quad a_m^{(k)} \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

Тогда представление (5) окончательно запишется в виде

$$u = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\overline{z^k(\zeta)} \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m^{(k)} \zeta^m + z^k(\zeta) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\overline{a_{-m}^{(k)}}}{|\zeta|^{2m}} \zeta^m \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \ln|z(\zeta)| \left(A_k |z(\zeta)|^{2k} + \sum_{\substack{l=0 \\ l \neq k}}^{n-1} [B_{kl} z^k(\zeta) \overline{z^l(\zeta)} + B_{lk} \overline{z^k(\zeta)} z^l(\zeta)] \right). \quad (7)$$

3. Переход к новым граничным условиям

Теперь необходимо перейти от граничных условий (1) в плоскости z к граничным условиям в плоскости ζ . Пусть при конформном отображении внутренняя граница ∂D_1 области D переходит в окружность радиуса r_1 , а внешняя граница ∂D_2 – в окружность радиуса $r_2 = \mu r_1$. Тогда граничные условия в плоскости ζ примут вид

$$\begin{aligned} u|_{|\zeta|=r_j} &= \tilde{g}_0^{(j)}(\theta) = g_0^{(j)}(z(r_j e^{i\theta})), \quad j = 1, 2; \\ \frac{\partial u}{\partial \bar{n}} \Big|_{|\zeta|=r_j} &= \tilde{g}_1^{(j)}(\theta) = g_1^{(j)}(z(r_j e^{i\theta})) \Big|_{z'(r_j e^{i\theta})}, \quad j = 1, 2; \\ &\dots\dots\dots, \\ \frac{\partial^{n-1} u}{\partial \bar{n}^{n-1}} \Big|_{|\zeta|=r_j} &= \tilde{g}_{n-1}^{(j)}(\theta) = \frac{\partial}{\partial \bar{n}} \left(\frac{\partial^{n-2} u}{\partial \bar{n}^{n-2}} \right) \Big|_{|\zeta|=r_j}, \quad j = 1, 2, \end{aligned} \quad (8)$$

где θ – полярный угол в плоскости ζ ; $\frac{\partial}{\partial \tilde{n}}$ – производная по направлению внешней нормали к границе кругового кольца в плоскости ζ .

Подробно следует остановиться на второй строке формул (8), т.е. на первой производной по нормали, поскольку первая строка очевидна, а далее каждая последующая производная получается из предыдущей.

Так как $\frac{\partial u}{\partial n}$ – нормальная производная в плоскости z , а $\frac{\partial u}{\partial \tilde{n}}$ – в плоскости ζ , то по определению нормальной производной:

$$\frac{\partial u}{\partial n} = (\nabla u \cdot \mathbf{n}) = |\nabla u| \cdot |\mathbf{n}| \cos(\nabla u, \mathbf{n}), \quad \frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} = (\tilde{\nabla} u \cdot \tilde{\mathbf{n}}) = |\tilde{\nabla} u| \cdot |\tilde{\mathbf{n}}| \cos(\tilde{\nabla} u, \tilde{\mathbf{n}}),$$

где $\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ – градиент функции u в плоскости z , а $\tilde{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta} \right)$ – градиент функции u в плоскости ζ . Тогда

$$\tilde{\nabla} u = \left(\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \right).$$

Обратная отображающая функция $z(\zeta)$ является аналитической, поэтому

$$z'(\zeta) = \frac{\partial x}{\partial \xi} + i \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial y}{\partial \eta} - i \frac{\partial x}{\partial \eta},$$

а значит,

$$\begin{aligned} |\tilde{\nabla} u| &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Re} z'(\zeta) + \frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{Im} z'(\zeta) \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \operatorname{Re} z'(\zeta) - \frac{\partial u}{\partial x} \operatorname{Im} z'(\zeta) \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2} \sqrt{\operatorname{Re}^2 z'(\zeta) + \operatorname{Im}^2 z'(\zeta)} = |\nabla u| |z'(\zeta)|. \end{aligned}$$

Учитывая, что $|\mathbf{n}| = |\tilde{\mathbf{n}}| = 1$ и что при конформном отображении имеет место консерватизм углов, т.е. $\cos(\nabla u, \mathbf{n}) = \cos(\tilde{\nabla} u, \tilde{\mathbf{n}})$, получим окончательно

$$\frac{\partial u}{\partial \tilde{n}} \Big|_{|\zeta|=r_j} = \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{z \in \partial D_j} \left| z'(r_j e^{i\theta}) \right| = g_1^{(j)}(z(r_j e^{i\theta})) \left| z'(r_j e^{i\theta}) \right|, \quad j=1, 2.$$

Таким образом, формулы (8) выражают граничные условия рассматриваемой задачи в плоскости ζ . Задача состоит теперь в том, чтобы определить коэффициенты $a_m^{(k)}$, A_k и B_{kl} такие, чтобы функция (7) удовлетворяла краевым условиям (8). Однако, поскольку количество этих коэффициентов не конечно, для решения задачи предлагается численный метод коллокации.

4. Применение метода коллокации

Метод коллокации предусматривает выполнение краевых условий в конечном числе отдельных (коллокационных) точек границы. Количество этих точек определяется количеством коэффициентов искомой функции. Сохраним в рядах (6) по $2N$ членов:

$$\varphi_k(\zeta) = \sum_{m=-N}^N \tilde{a}_m^{(k)} \zeta^m, \quad \tilde{a}_0^{(k)} = 0 \quad (k = \overline{0, n-1}). \quad (9)$$

Тогда общее число неизвестных вещественных и мнимых частей коэффициентов функции (5) равно $4nN + n^2$. Пронумеровав их от 1 до $4nN + n^2$, искомую функцию можно представить в виде ряда:

$$u(\zeta) = \sum_{m=1}^{4nN+n^2} C_m F_m(\zeta), \quad (10)$$

члены которого в зависимости от номера m приведены в табл. 1.

На границе кругового кольца в плоскости ζ выберем $(4N + n)$ коллокационных точек ζ_q , $q = \overline{1, 4N + n}$; в частности, если n – четное, то каждую из окружностей, ограничивающих кольцо в плоскости ζ , можно разбить на $2N + \frac{n}{2}$ частей. При этом необходимо учесть, что поскольку выражения для $F_m(\zeta)$ содержат ζ в отрицательной степени, а также $\ln|z(\zeta)|$, то во множество коллокационных точек не следует включать точку $\zeta_q = 0$.

Введем следующие обозначения:

$$u_q^{(k)} = \begin{cases} \tilde{g}_k^{(1)}(\zeta_q), & |\zeta_q| = r_1, \\ \tilde{g}_k^{(2)}(\zeta_q), & |\zeta_q| = r_2, \end{cases} \quad k = \overline{0, n-1}, \quad q = \overline{1, 4N + n},$$

$$F_m^{(k)}(\zeta) = \frac{d^k F_m(\zeta)}{d\tilde{n}^k} = \frac{d^k F_m(\zeta)}{d\rho^k}, \quad k = \overline{0, n-1}, \quad m = \overline{1, 4nN + n^2},$$

$$L_{mq}^{(k)} = F_m^{(k)}(\zeta_q), \quad k = \overline{0, n-1}, \quad m = \overline{1, 4nN + n^2}, \quad q = \overline{1, 4N + n}.$$

Далее при $m = \overline{1, 4nN + n^2}$ имеем:

$$U_q = \begin{cases} u_q^{(0)}, \\ u_{q-4N-n}^{(1)}, \\ \dots, \\ u_{q-(4N+n)(n-1)}^{(n-1)}, \end{cases} \quad M_{qm} = \begin{cases} L_{mq}^{(0)}, & q = \overline{1, 4N + n}, \\ L_{m, q-4N-n}^{(1)}, & q = \overline{4N + n + 1, 8N + 2n}, \\ \dots, \\ L_{m, q-(4N+n)(n-1)}^{(n-1)}, & q = \overline{(4N + n)(n-1) + 1, 4nN + n^2}. \end{cases}$$

Таблица 1

$m =$	$C_m =$	$F_m(\zeta) =$
$\overline{1, N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-N-1}^{(0)}$	$\operatorname{Re} \zeta^{m-N-1}$
$\overline{N+1, 2N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-N}^{(0)}$	$\operatorname{Re} \zeta^{m-N}$
$\overline{2N+1, 3N}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-3N-1}^{(0)}$	$-\operatorname{Im} \zeta^{m-3N-1}$
$\overline{3N+1, 4N}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-3N}^{(0)}$	$-\operatorname{Im} \zeta^{m-3N}$
$\overline{4N+1, 5N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-5N-1}^{(1)}$	$\operatorname{Re} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-5N-1}$
$\overline{5N+1, 6N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-5N}^{(1)}$	$\operatorname{Re} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-5N}$
$\overline{6N+1, 7N}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-7N-1}^{(1)}$	$-\operatorname{Im} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-7N-1}$
$\overline{7N+1, 8N}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-7N}^{(1)}$	$-\operatorname{Im} \overline{z(\zeta)} \zeta^{m-7N}$
...	...	...
$\overline{4(n-1)N+1, (4n-3)N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-(4n-3)N-1}^{(n-1)}$	$\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-3)N-1} \right)$
$\overline{(4n-3)N+1, (4n-2)N}$	$\operatorname{Re} \tilde{a}_{m-(4n-3)N}^{(n-1)}$	$\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-3)N} \right)$
$\overline{(4n-2)N+1, (4n-1)N}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-(4n-1)N-1}^{(n-1)}$	$-\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-1)N-1} \right)$
$\overline{(4n-1)N+1, 4nN}$	$\operatorname{Im} \tilde{a}_{m-(4n-1)N}^{(n-1)}$	$-\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-1}(\zeta)} \zeta^{m-(4n-1)N} \right)$
$\overline{4nN+1, 4nN+n}$	$A_{m-4nN-1}$	$ z(\zeta) ^{2(m-4nN-1)} \ln z(\zeta) $
$\overline{4nN+n+1, 4nN+2n-1}$	$\operatorname{Re} B_{0,m-4nN-n}$	$\operatorname{Re} \left(\overline{z^{m-4nN-n}(\zeta)} \right) \ln z(\zeta) $
$\overline{4nN+2n, 4nN+3n-2}$	$\operatorname{Im} B_{0,m-4nN-2n+1}$	$\operatorname{Im} \left(\overline{z^{m-4nN-2n+1}(\zeta)} \right) \ln z(\zeta) $
$\overline{4nN+3n-1, 4nN+4n-4}$	$\operatorname{Re} B_{1,m-4nN-3n+3}$	$\operatorname{Re} \left(\overline{z(\zeta)} z^{m-4nN-3n+3}(\zeta) \right) \ln z(\zeta) $
$\overline{4nN+4n-3, 4nN+5n-6}$	$\operatorname{Im} B_{1,m-4nN-4n+5}$	$\operatorname{Im} \left(\overline{z(\zeta)} z^{m-4nN-4n+5}(\zeta) \right) \ln z(\zeta) $
...	...	...
$4nN+n^2-1$	$\operatorname{Re} B_{n-2,n-1}$	$\operatorname{Re} \left(\overline{z^{n-2}(\zeta)} z^{n-1}(\zeta) \right) \ln z(\zeta) $
$4nN+n^2$	$\operatorname{Im} B_{n-2,n-1}$	$\operatorname{Im} \left(\overline{z^{n-2}(\zeta)} z^{n-1}(\zeta) \right) \ln z(\zeta) $

Все значения $u_q^{(k)}$ и $L_{mq}^{(k)}$ можно вычислить, и задача сводится к системе линейных алгебраических уравнений $\mathbf{U} = \mathbf{MC}$ для нахождения неизвестных коэффициентов C_m . Решение можно записать в матричной форме:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{U}. \quad (11)$$

Коэффициенты рядов (9), а также значения A_k и B_{kl} можно найти из табл. 1.

5. Тестовые примеры

Пример 1. Аналитическое решение в круговом кольце. Рассматривается следующая задача: найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую в кольце, радиусы которого равны 1 и R ($R > 1$), уравнению $\Delta^3 u = 0$, непрерывную вместе со своими производными до 2-го порядка включительно в $1 \leq |z| \leq R$ и удовлетворяющую на границах кольца условиям ($\theta \in [0, 2\pi)$):

$$\begin{aligned} u|_{|z|=1} &= 0,5 \sin 2\theta (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta), \quad u|_{|z|=R} = 0,5R^5 \sin 2\theta (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta), \\ \frac{\partial u}{\partial n}|_{|z|=1} &= 2,5 \sin 2\theta (\cos^3 \theta - \sin^3 \theta), \quad \frac{\partial u}{\partial n}|_{|z|=R} = 2,5R^4 \sin 2\theta (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{|z|=1} &= 10 \sin 2\theta (\sin^3 \theta - \cos^3 \theta), \quad \frac{\partial^2 u}{\partial n^2}|_{|z|=R} = 10R^3 \sin 2\theta (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta). \end{aligned} \quad (12)$$

В силу (5) и (6) решение ищется в виде

$$\begin{aligned} u(z) &= \operatorname{Re} \left[\varphi_0(z) + \bar{z} \varphi_1(z) + \bar{z}^2 \varphi_2(z) \right] + \\ &+ \frac{\ln |z|}{2} \left(A_0 + A_1 |z|^2 + A_2 |z|^4 + 2 \operatorname{Re} \left[B_{01} \bar{z} + B_{02} \bar{z}^2 + B_{12} z \bar{z}^2 \right] \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\varphi_k(z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(\alpha_m^{(k)} + i \beta_m^{(k)} \right) z^m \quad (k = \overline{0, 2}). \quad (14)$$

Подставив теперь (14) и $z = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$ в (13), получим

$$\begin{aligned} u &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \rho^m \left[\left(\alpha_m^{(0)} + \rho^2 \alpha_{m+1}^{(1)} + \rho^4 \alpha_{m+2}^{(2)} \right) \cos m\theta - \right. \\ &\quad \left. - \left(\beta_m^{(0)} + \rho^2 \beta_{m+1}^{(1)} + \rho^4 \beta_{m+2}^{(2)} \right) \sin m\theta \right] + \\ &+ \frac{\ln \rho}{2} \left(A_0 + A_1 \rho^2 + A_2 \rho^4 \right) + \ln \rho \left(\operatorname{Re} B_{01} \rho \cos \theta + \operatorname{Im} B_{01} \rho \sin \theta + \right. \\ &\quad \left. + \operatorname{Re} B_{02} \rho^2 \cos 2\theta + \operatorname{Im} B_{02} \rho^2 \sin 2\theta + \operatorname{Re} B_{12} \rho^3 \cos \theta + \operatorname{Im} B_{12} \rho^3 \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (15)$$

С учетом, что $n = (\cos \theta, \sin \theta)$, первая и вторая нормальные производные полученной функции равны соответственно $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial \rho}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2}$.

Положив затем в найденных производных $\rho=1$ и $\rho=R$ и приравняв полученные выражения правым частям соответствующих равенств (12), получим систему линейных алгебраических уравнений, решив которую найдем следующие значения коэффициентов в разложениях (14):

$$\alpha_0^{(1)} = -\alpha_1^{(0)}; \quad \alpha_1^{(2)} = -\alpha_2^{(1)}; \quad \beta_0^{(1)} = \beta_1^{(0)}; \quad \beta_1^{(2)} = \beta_2^{(1)};$$

$$\alpha_3^{(2)} = -\beta_3^{(2)} = \frac{1}{8}; \quad \alpha_4^{(1)} = \beta_4^{(1)} = -\frac{3}{16}; \quad \alpha_5^{(0)} = -\beta_5^{(0)} = \frac{1}{16}.$$

Все остальные коэффициенты равны нулю. Подставив теперь эти коэффициенты в (15), получим выражение для искомой полигармонической функции 3-го порядка:

$$u(z) = \rho^5 \left(\frac{1}{8} \cos \theta + \frac{1}{8} \sin \theta - \frac{3}{16} \cos 3\theta + \frac{3}{16} \sin 3\theta + \frac{1}{16} \cos 5\theta + \frac{1}{16} \sin 5\theta \right),$$

или, что то же самое,

$$u = xy(x^3 + y^3).$$

Пример 2. Применение метода коллокации для решения в эллиптическом кольце. Рассмотрим основную краевую задачу для бигармонического уравнения в двусвязной области, ограниченной двумя софокусными эллипсами с полуосями $a_1=13$, $b_1=5$ и $a_2=15$, $b_2=9$ (эллиптическое кольцо). Границы области задаются уравнениями

$$\partial D_j: \begin{cases} x_j(t) = a_j \cos t, \\ y_j(t) = (-1)^j b_j \sin t, \end{cases} \quad j = \overline{1,2}, \quad t \in [0, 2\pi).$$

Конформное отображение такой области на круговое кольцо с единичным внешним радиусом осуществляет функция, обратная к которой имеет вид

$$z = 12\zeta + \frac{3}{\zeta}. \quad (16)$$

Внутренний радиус кругового кольца в плоскости ζ равен 0,75 (рис. 1).

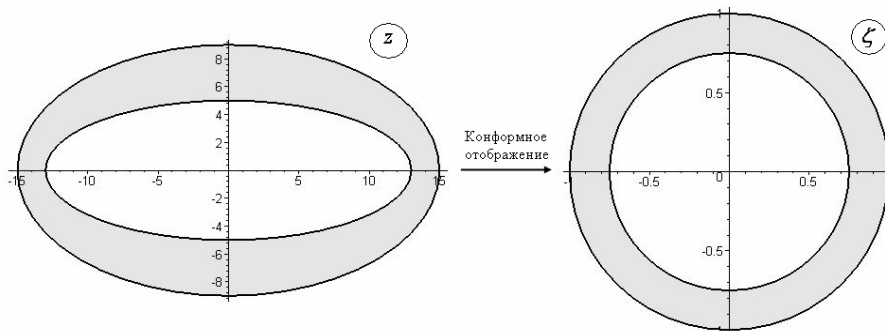


Рис. 1. Конформное отображение эллиптического кольца

Граничные условия задачи зададим в предположении, что $u = xy(x^2 + y^2)$ – искомая функция. Она является бигармонической, и для нее может быть найдена первая нормальная производная на границе эллиптического кольца. Таким образом, граничные условия имеют вид

$$u|_{\partial D_j} = (-1)^j \sin 2t \frac{a_j b_j}{2} (a_j^2 \cos^2 t + b_j^2 \sin^2 t), \quad j = \overline{1, 2}, \quad t \in [0, 2\pi),$$

$$\frac{\partial u}{\partial n} \Big|_{\partial D_j} = \frac{\sin 2t}{\sqrt{b_j^2 \cos^2 t + a_j^2 \sin^2 t}} \left(a_j^2 b_j^2 + \frac{a_j^2 + b_j^2}{2} (a_j^2 \cos^2 t + b_j^2 \sin^2 t) \right).$$

Далее от заданных граничных условий в плоскости z по формулам (8) необходимо перейти к новым граничным условиям в плоскости ζ .

Поскольку u – бигармоническая функция, то ряд (10) имеет $(8N + 4)$ членов, и поэтому в качестве коллокационных точек выберем $\zeta_q = 0.75e^{-iT_q}$,

$$\zeta_{q+2N+1} = e^{iT_q}, \quad \text{где } T_q = \frac{2\pi q}{2N+1} - \frac{\pi}{150}, \quad q = \overline{1, 2N+1}.$$

На рис. 2 представлены результаты решения для случая $N = 30$ (т.е. на каждой окружности, ограничивающей кольцо в плоскости ζ , берется по 61 коллокационной точке).

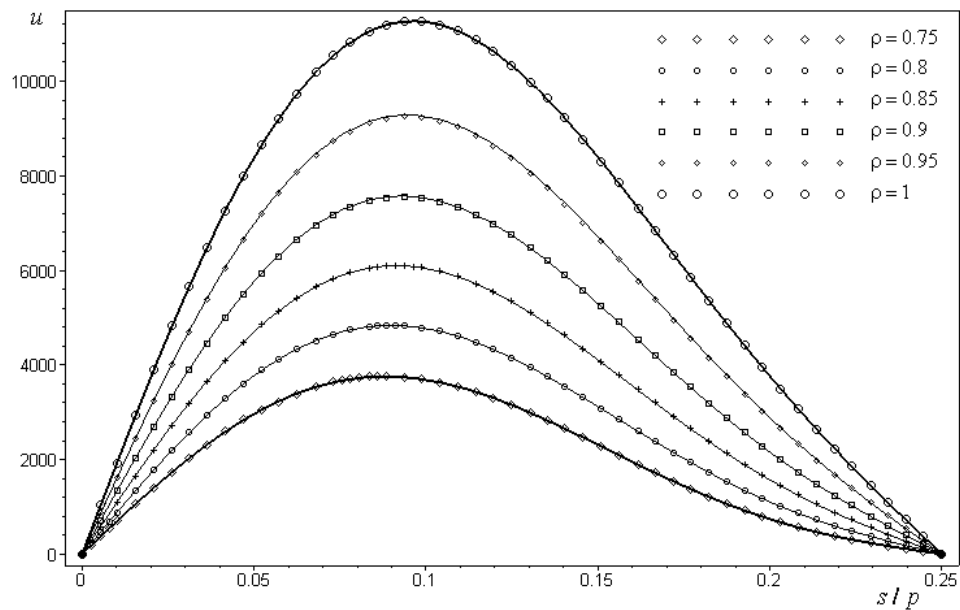


Рис. 2. Результаты решения примера 2: сплошные линии – графики точного решения, точечные линии – графики функции, найденной с применением метода коллокации

Каждой окружности $|\zeta| = \rho$ ($0,75 < \rho < 1$), лежащей внутри кругового кольца в плоскости ζ , функция (16) ставит в соответствие эллипс, лежащий

внутри эллиптического кольца в плоскости z . Точечными линиями показана зависимость найденной с применением метода коллокации функции u от нормированной дуговой координаты s/p (p – длина соответствующего эллипса) для различных фиксированных значений $\rho \in [0,75; 1]$. Графики соответствующих значений точного решения показаны сплошными линиями. Значения функции u являются периодическими с периодом $T = 0,5p$ и антисимметричны относительно $T/2 = 0,25p$, поэтому указанные графики представлены только для $s/p \in [0; 0,25]$.

Заключение

В работе предложено приближенное численно-аналитическое решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения в плоской двусвязной кольцеобразной области, основанное на применении методов комплексного анализа и метода коллокации. Из тестовых примеров видно, что предложенный способ решения является весьма эффективным для рассматриваемого класса областей. Предложенные в данной работе методы решения основной краевой задачи для полигармонического уравнения справедливы, очевидно, только для двусвязных областей, для которых конформное отображение на круговое кольцо известно или может быть найдено. Следует, однако, заметить, что разработке приближенных методов нахождения отображающих функций посвящено большое количество работ различных авторов (например, [13]); в частности, для двусвязных кольцеобразных областей с гладкими границами конформное отображение на круговое кольцо может быть найдено в виде степенного ряда с любой наперед заданной точностью.

Список литературы

1. **Векуа, И. Н.** Новые методы решения эллиптических уравнений / И. Н. Векуа. – М.: Гостехиздат, 1948. – 296 с.
2. **Рогожин, В. С.** Некоторые краевые задачи для полигармонического уравнения / В. С. Рогожин // Ученые записки Казанского университета. – 1950. – Т. 110, № 4. – С. 71–93.
3. **Ганин, М. П.** Краевые задачи для полианалитических функций / М. П. Ганин // Доклады АН СССР. – 1951. – Т. 75, № 6. – С. 921–924.
4. **Бицадзе, А. В.** О единственности решения задачи Дирихле для эллиптических уравнений с частными производными / А. В. Бицадзе // Успехи математических наук. – 1948. – Т. 3, № 6. – С. 211–212.
5. **Михайлов, В. П.** О существовании предельных значений на границе области решений полигармонического уравнения / В. П. Михайлов // Математический сборник. – 1996. – Т. 187, № 11. – С. 89–114.
6. **Бицадзе, А. В.** О некоторых свойствах полигармонических функций / А. В. Бицадзе // Дифференциальные уравнения. – 1988. – Т. 24, № 5. – С. 825–831.
7. **Кангужин, Б. Е.** Необходимые и достаточные условия разрешимости краевых задач для неоднородного полигармонического уравнения в шаре / Б. Е. Кангужин, Б. Д. Кошанов // Уфимский математический журнал. – 2010. – Т. 2, № 2. – С. 41–52.
8. **Турметов, Б. Х.** Об одной краевой задаче для полигармонического уравнения с граничным оператором дробного порядка / Б. Х. Турметов, М. Т. Ильясова // Дифференциальные уравнения, теория функций и приложения : тр. Междунар. конф. – Новосибирск : Изд-во НГУ, 2007. – С. 318–319.

9. Жегалов, В. И. Некоторые краевые задачи для полианалитических функций / В. И. Жегалов // Труды семинара по краевым задачам. – 1976. – Вып. 13. – С. 80–85.
10. Терентьев, А. Г. Движение цилиндра в вязкой жидкости при малых числах Рейнольдса / А. Г. Терентьев, А. А. Терентьев // Известия НАНИ ЧР. – 2002. – № 2. – С. 44–62.
11. Казакова, А. О. О поле скоростей вязкой жидкости между двумя цилиндрами, вращающимися и движущимися поступательно / А. О. Казакова, А. Г. Петров // Известия РАН. Механика жидкости и газа. – 2016. – № 3. – С. 16–25.
12. Казакова, А. О. Применение метода коллокации к решению основной краевой задачи для полигармонического уравнения / А. О. Казакова // Вестник Чувашского университета. – 2013. – № 3. – С. 12–19.
13. Фильчаков, П. Ф. Приближенные методы конформных отображений / П. Ф. Фильчаков. – Киев : Наукова думка, 1964. – 536 с.

References

1. Vekua I. N. *Novyye metody resheniya ellipticheskikh uravneniy* [New methods of elliptical equation solving]. Moscow: Gostekhizdat, 1948, 296 p.
2. Rogozhin B. C. *Uchenye zapiski Kazanskogo universiteta* [Proceedings of Kazan University]. 1950, vol. 110, no. 4, pp. 71–93.
3. Ganin M. P. *Doklady AN SSSR* [Reports of AS USSR]. 1951, vol. 75, no. 6, pp. 921–924.
4. Bitsadze A. V. *Uspekhi matematicheskikh nauk* [Progress of mathematical sciences]. 1948, vol. 3, no. 6, pp. 211–212.
5. Mikhaylov V. P. *Matematicheskii sbornik* [Mathematical collection]. 1996, vol. 187, no. 11, pp. 89–114.
6. Bitsadze A. V. *Differentsial'nye uravneniya* [Differential equations]. 1988, vol. 24, no. 5, pp. 825–831.
7. Kanguzhin B. E., Koshanov B. D. *Ufimskiy matematicheskii zhurnal* [Ufa mathematical journal]. 2010, vol. 2, no. 2, pp. 41–52.
8. Turmetov B. Kh., Il'yasova M. T. *Differentsial'nye uravneniya, teoriya funktsiy i prilozheniya: tr. Mezhdunar. konf.* [Differential equations, the theory of functions and applications: proceedings of an International conference]. Novosibirsk: Izd-vo NGU, 2007, pp. 318–319.
9. Zhegalov V. I. *Trudy seminarov po kraevym zadacham* [Proceedings of a seminar on boundary problems]. 1976, iss. 13, pp. 80–85.
10. Terent'ev A. G., Terent'ev A. A. *Izvestiya NANI ChR* [Proceedings of the National Academy of Science and Art of the Republic of Chuvashia]. 2002, no. 2, pp. 44–62.
11. Kazakova A. O., Petrov A. G. *Izvestiya RAN. Mekhanika zhidkosti i gaza* [Proceedings of RAS. Liquid and gas mechanics]. 2016, no. 3, pp. 16–25.
12. Kazakova A. O. *Vestnik Chuvashskogo universiteta* [Bulletin of Chuvashia University]. 2013, no. 3, pp. 12–19.
13. Fil'chakov P. F. *Priblizhennyye metody konformnykh otobrazheniy* [Approximate methods of conformal mapping]. Kiev: Naukova dumka, 1964, 536 p.

Казакова Анастасия Олеговна

кандидат физико-математических наук,
доцент, кафедра актуарной
и финансовой математики, Чувашский
государственный университет
имени И. Н. Ульянова (Россия,
г. Чебоксары, Московский проспект, 15)

E-mail: kazakova_anastasia@bk.ru

Kazakova Anastasiya Olegovna

Candidate of physical and mathematical
sciences, associate professor,
sub-department of actuarial and financial
mathematics, Chuvash State University
named after I. N. Ulianov (15 Moskovskiy
avenue, Cheboksary, Russia)

УДК 517.95

Казаков, А. О.

Приближенное решение основной краевой задачи для полигармонического уравнения в кольцеобразной области / А. О. Казакова // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физико-математические науки. – 2017. – № 3 (43). – С. 15–27. DOI 10.21685/2072-3040-2017-3-2